

Diferenciál – další příklady:

1. Je dána funkce $f(x, y) = \log(\sqrt{y+1} - x)$.
 - a) Najděte definiční obor D funkce g a nakreslete jej.
 - b) Vypočítejte gradient $\nabla f(0,0)$.
 - c) Ukažte, že funkce f má v bodě $[0,0]$ totální diferenciál a určete jej. Napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,0,0]$.
 - d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04; 0,02)$.
2. Ukažte, že funkce $f(x, y) = \sqrt{|x \cdot y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$ (i když je v bodě $(0,0)$ spojitá a má zde obě parciální derivace).
3. a) Ukažte, že funkce $f(x, y, z) = (x^2 + e^y, x + y \cdot \sin z)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1,0)$ a napište totální diferenciál v tomto bodě.
 - b) Najděte Jacobiho matici a totální diferenciál (všude, kde existuje) funkcí:
 - i) $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$; ii) $f(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$;
 - iii) $f(r, \varphi, z) = (r \sin \varphi \cos \varphi, r \sin \varphi \sin \varphi, r \cos \varphi)$;
 - iv) $f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

Derivace ve směru:

1. Zopakujte si odvození derivace funkce f v bodě (x, y) ve směru $\vec{a} = (a_1, a_2)$, tj. $g'(0)$, je-li $g(t) = f(x + a_1 t, y + a_2 t)$, má-li f totální diferenciál v bodě (x, y) a $\vec{a} = (a_1, a_2)$.
Pokuste o totéž, je-li f funkce n proměnných ($n \geq 3$).
2. Určete derivaci funkce $f(x, y) = \log(x + y)$ v bodě $(1,2)$, ležícím na parabole $y^2 = 4x$, ve směru jednotkového vektoru, tečného k parabole v tomto bodě.
3. Zjistěte, zda funkce $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a} = (2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.
4. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $X_0 \in R^n$ a $\nabla f(X_0) \neq \vec{0}$, pak vektor $\nabla f(X_0)$ udává směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě X_0 .